$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}$$

Les solutions de $(*)$ sont

$$S_{(*)} = \{ (\underbrace{16+4x_3}_{\substack{x_1 \\ \text{var. liées}}}, \underbrace{-11-3x_3}_{x_2}, \underbrace{x_3}_{\substack{\text{var} \\ \text{libre}}}) : x_3 \in \mathbb{R} \}$$

Dans cette séance on va voir

(i) Critère pour déterminer si un SEL est incompatible ou compatible $\begin{cases} \to \text{déterminé} \\ \to \text{indéterminé} \end{cases}$

(ii) exprimer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme combinaison linéaire (CL) des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

(iii) notions de $\boxed{\text{sous-espace engendré par une famille}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

(iv) notion de $\boxed{\text{famille libre et liée}}$

(v) notion de produit $\underbrace{A}_{\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} . \underbrace{\vec{v}}_{\in \mathbb{R}^n}$

(vi) la forme vectorielle d'un SEL

Critère pour SEL incomp / comp → déterminé / indéterminé

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

matrice augmentée

$$= \underbrace{[\, A \;\vdots\; \vec{b} \,]}_{\text{notation abrégée pour matrice augmentée}}$$

On suppose que l'on a

$\boxed{\text{Critère}}$ $[A \vdots \vec{b}] \xrightarrow{\text{OEL}} \underbrace{[A' \vdots \vec{b}']}_{\text{FER}}$

(1) Si la FER $[A' \vdots \vec{b}']$ contient une ligne de la forme $(0 \dots 0 \vdots b_i')$ avec $b_i' \neq 0$, alors $[A \vdots \vec{b}]$ ou (*) est $\boxed{\text{incompatible}}$.

(2) Sinon, le SEL (*) ou $[A \vdots \vec{b}]$ est $\boxed{\text{compatible}}$.

Dans ce cas, (*) est $\boxed{\text{déterminé}}$ ssi la

FER A' n'a pas de variable libre

Chapitre 2 : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

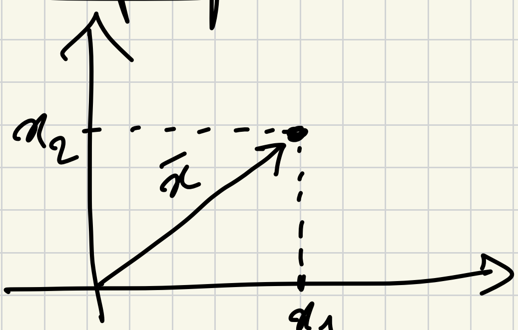
Déf. (p. 21) (définition préliminaire)

Vecteur = Vecteur colonne = élément de $\mathbb{R}^n$

taille de $\bar{x}$

n-uplets $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Graphiquement ($n=2$ ou $n=3$)



pour $\mathbb{R}^2$

Opérations sur les vecteurs

Pour $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

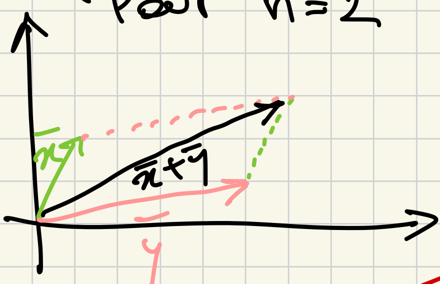
$$\bar{x} + \bar{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

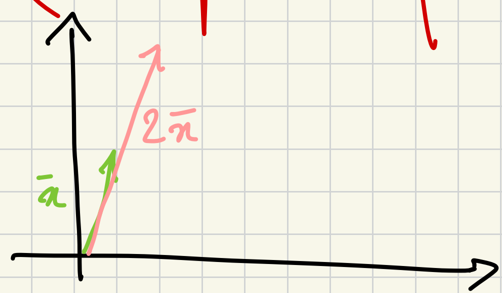
(somme de vecteurs)

$$\lambda . \bar{x} := \begin{pmatrix} \lambda . x_1 \\ \vdots \\ \lambda . x_n \end{pmatrix}$$

(multiplication par scalaire λ)

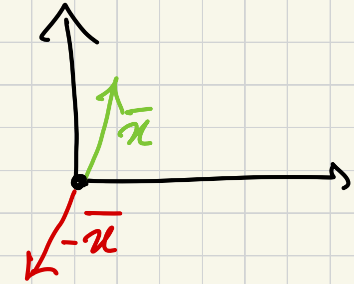
Pour $n = 2$





On rappelle le $\boxed{\text{vecteur nul}}$ $0_{\mathbb{R}^n}$ ou 0 donné par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← l'origine !

et le **vecteur opposé** de $\bar{x}$



$$-\bar{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Prop. 2.3 Pour $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

- $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (commutativité)
- $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (associativité)
- $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$
- $(\lambda + \mu)\cdot\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$

$\Big\}$ (distributivité)

- $(\lambda\cdot\mu)\cdot\bar{x} = \lambda\cdot(\mu\cdot\bar{x})$ (associativité mixte)

Déf 2.5 On dit que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont dans $\mathbb{R}^n$ **colinéaires**

s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} = \lambda \bar{y}$ ou $\bar{y} = \lambda . \bar{x}$

Question $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\bar{x}=}$ et $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{y}=}$ sont-ils colinéaires?

Réponse est oui!

car $\bar{y} = 0 . \bar{x} = 0 . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

Déf. 2.8 | É.d. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Une combinaison linéaire (C.L) des éléments de $\mathcal{F}$ est un vecteur de la forme

$$\lambda_1 . \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k . \bar{v}_k$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ on les appelle les coefficients de la CL

Exemple 2.10 On considère $\mathcal{G} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Soit $\bar{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Question: Est-ce que $\bar{w}$ est C.L. de $\mathcal{G}$?

Solution On suppose que $\bar{w}$ est C.L de $\mathcal{G}$, i.e.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (*) \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underbrace{x_2 = -3}_{\text{par la 3ème ég.}}$ et la 2ème ég. nous dit $x_1 = 3/2$

Mais la 1ère ég n'est pas vérifiée car

$$3.\left(3/2\right) + (-3) \neq 4 \quad ⚡ \text{ (contradiction)}$$

$\Rightarrow (*)$ incompatible ⚡ $\Rightarrow \bar{w}$ n'est CL de $\mathcal{G}$.

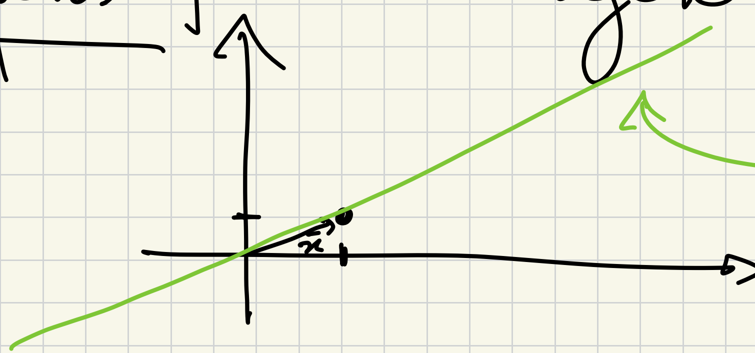
$\boxed{\text{Déf. 2.12}}$ Étant donné $\mathcal{G} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, la partie de $\mathbb{R}^n$ (ou sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$) engendré(e) par $\mathcal{G}$ est

$$\text{Vect}\, \mathcal{G} = \text{Vect}\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\} \overset{\text{déf}}{:=} \{\lambda_1 \bar{v}_1 + \ldots + \lambda_k \bar{v}_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

ensemble de toutes les C.L. de $\mathcal{G}$

Exemple Soit $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'est-ce que c'est $\mathrm{Vect}\{\bar{v}\}$?

Réponse Droite engendrée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}$$

Déf. 2.18 Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée (ou linéairement dépendante) s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels qu'il y a au moins un non zéro et tels que

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = 0$$

vecteur nul $= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

La famille $\mathcal{F}$ est dite libre (ou linéairement indépendante) si elle n'est pas liée.

Question De quelle façon équivalente on peut dire que $\mathcal{F}$ est libre ?

(1) Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \bar{v}_1 + \ldots + \lambda_k \bar{v}_k = \emptyset$. ✗

(2) $\forall$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 \bar{v}_1 + \ldots + \lambda_k \bar{v}_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ ✓

(3) $0\bar{v}_1 + \ldots + 0\bar{v}_k = \emptyset$ ✗

(4) $\exists$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul, alors $\lambda_1 \bar{v}_1 + \ldots + \lambda_k \bar{v}_k \neq \emptyset$. ✓

$\boxed{\text{Logique}}$

$$\underbrace{\neg}_{\text{négation}} \left(\underbrace{\exists x}_{\text{il existe } x \text{ tel que}} P(x) \right) \equiv \underbrace{\forall x}_{\text{pour tout } x} \left(\neg P(x) \right)$$!

$\boxed{\text{Exemple 2.20}}$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Est-ce que $\mathcal{F}$ est libre?

$$\mathcal{F} \text{ libre} \underset{\text{par (2)}}{\iff} \text{si } \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \vec{v}_2 \\ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \vec{v}_3 \\ x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$\iff (*) \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \text{ implique } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$\iff$ (*) est compatible $\boxed{\text{déterminé}}$

Avec notre critère :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1]{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 14L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{(critère)}}{\Longrightarrow}$$

pas de variables libres

le SEL (*) est

déterminé

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ est libre

THM 2.22 Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée ssi il existe $i \in \underbrace{[\![1,k]\!]}_{=\{1,\dots,k\}}$ tel que $\bar{v}_i$ est C.L. des vecteurs dans $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_k\}$

(Preuve) $\longleftarrow$ Exercice (important)

Exemple (p. 29 + Ex. 2.21) Dans $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B}_{can} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\bar{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\bar{e}_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{\bar{e}_n} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

base canonique de $\mathbb{R}^n$

Montrer que $\mathcal{B}_{can}$ est libre et que $\text{Vect}\,\mathcal{B}_{can} = \mathbb{R}^n$ (exercice)

Chapitre 3 : Forme vectorielle d'un SEL

Déf. 3.1 (produit matrice avec vecteur)

Pour $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$, on notera

$$A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \qquad \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Pour $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\underbrace{A}_{\in M_{m\times n}(\mathbb{R})} . \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} := x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

produit matrice avec vecteur

Lemme 3.2 Pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$A.(\bar{x} + \lambda \bar{y}) = A.\bar{x} + \lambda A.\bar{y}$$

Point clé (p. 38)

$$(*)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \overset{\text{déjà vu}}{\Longleftrightarrow}$$

Matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

(nouveau)

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\overline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\overline{b}}$$

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

Forme vectorielle du SEL (*)